Soluzioni Gara A Squadre - 8 febbraio 2018

1. Dato che $27 \cdot 37 = 999$, per trovare il resto della divisione per 27 o 37 si divide in terzetti di cifre (a partire da destra) il numero. Il resto cercato è uguale al resto della somma di tutti i terzetti trovati.

   Ora 201820182018 è uguale a $2018 \cdot 100010001$.

   Quindi

   $$\begin{aligned} 2018 &\equiv 2 + 018 \equiv 20 && \pmod{27} \text{ o } \pmod{37} \\ 100010001 &\equiv 100 + 010 + 001 \equiv 111 \equiv 3 \cdot 37 && \pmod{27} \text{ o } \pmod{37} \end{aligned}$$

   Calcolo di a:

   $$201820182018 = 2018 \cdot 1001001001 \equiv 20 \cdot 3 \cdot 37 \equiv 6 \pmod{27}$$

   per cui $a = 6$.

   Calcolo di b:

   $$201820182018 = 2018 \cdot 1001001001 \equiv 20 \cdot 3 \cdot 37 \equiv 0 \pmod{37}$$

   per cui $b = 0$.

   La somma $a + b$ è uguale a 6.

2. La scomposizione in fattori primi di 2018 è $2018 = 2 \cdot 1009$. Il 2 e il 1009 si possono rappresentare come somma di quadrati in un unico modo, $2 = 1^2 + 1^2$ e $1009 = 15^2 + 28^2$. Applicando l'identità $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ si ottiene l'unica soluzione $2018 = 13^2 + 43^2$. Il prodotto vale 559.

3. Il punto finale trovato è l'incentro del triangolo poiché è equidistante dai lati. Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo ($(8, 15, 17)$ è una terna pitagorica) è

   $$r = \frac{a + b - c}{2}$$

   dove a, b e c sono le misure dei cateti e dell'ipotenusa.

   Il numero dei triangoli disegnati è quindi

   $$\frac{8 + 15 - 17}{2} \cdot \frac{100}{2} = 150.$$

4. *SOLUZIONE 1*

   Siano T l'età di T. e M l'età di M., si ottiene

   $$\begin{aligned} T^2 + M &= 3523 \\ M^2 + T &= 1823 \end{aligned}$$

   Sottraendo membro a membro e raccogliendo si ha $(T - M)(T + M - 1) = 1700$. $T - M$ e $T + M + 1$ hanno parità diverse. L'unica soluzione accettabile si ottiene con $T - M = 17$ e $T + M - 1 = 100$ da cui $M = 59$ e $T = 42$.

   SOLUZIONE 2

   Dato che $59^2 < 3523 < 60^2$ e $42^2 < 1823 < 43^2$ le uniche soluzioni intere possibili sono $M = 59$ e $T = 42$ che effettivamente soddisfano le richieste.

5. Sia $\overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}$ la rappresentazione decimale del numero cercato. Deve risultare

   $$\overline{a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n6} = \frac{1}{4} \cdot \overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}$$

   ovvero

   $$4 \cdot \overline{a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n6} = \overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}.$$

La cifra a_n deve essere quindi 4 (la cifra delle unità di 6×4). Sostituendo si ottiene

$$4 \cdot \overline{a_2a_3a_4\cdots a_{n-1}46} = \cdot\overline{6a_2a_3a_4\cdots a_{n-1}4}.$$

Ora la cifra a_{n-1} è la cifra delle unità di $4 \times 4 + 2$ (2 è il riporto della moltiplicazione precedente) ovvero 8.

Procedendo in questo modo si ricava $a_{n-2} = 3$, $a_{n-3} = 5$, $a_{n-4} = 1$ e finalmente $a_{n-5} = 6$. Il numero cercato è quindi 615384. La risposta è 2880.

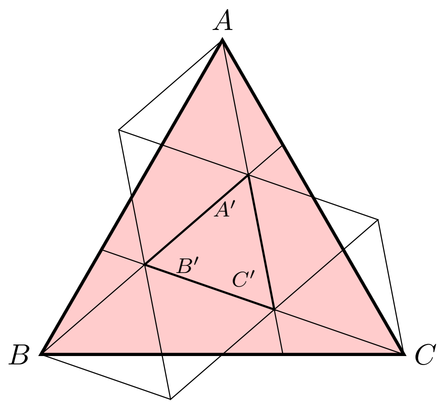
6. Le cifre 4, 6, e 8 non possono essere cifre delle unità. Quindi la somma è al minimo $40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207$. L'insieme $\{2, 5, 7, 43, 61, 89\}$ realizza questo minimo.

7. Non possono esserci 8 numeri consecutivi *discoli*. Infatti tra 8 numeri consecutivi c'è sicuramente un numero n congruo a 4 modulo 8. Quindi $n = 8k + 4 = 4(2k + 1) = 2^2(2k + 1)$, n non è *discolo*. Una sequenza di 7 numeri discoli consecutivi è rappresentata dai numeri 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

8. *SOLUZIONE 1*

   Siano A', B', C' rispettivamente i punti di intersezione di AD e BE, BE e CF, CF e AD: per motivi di simmetria il triangolo $A'B'C'$ è equilatero.

   Si verifica che il triangolo ABC è equivalente a 7 triangoli uguali a $A'B'C'$ la cui area è pari allì'area del triangolo ABC come evidenziato in figura.



Nota: poiché rapporti di segmenti allineati e rapporti di aree sono invarianti per affinità e, fissati due triangoli non degeneri, esiste una ed una sola affinità che trasforma l'uno nell'altro, l'ipotesi che il triangolo sia equilatero è inessenziale.

SOLUZIONE 2

Risolviamo il problema in coordinate baricentriche omogenee.
I punti A, B, C hanno rispettivamente coordinate $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
I punti D, E, F hanno rispettivamente coordinate $(0, 1/3, 2/3)$, $(2/3, 0, 1/3)$, $(1/3, 2/3, 0)$.
L'equazione della retta generica è $ax + by + cz = 0$.
L'equazione della retta passante per B e E è: $x = 2z$.
L'equazione della retta passante per A e D è: $z = 2y$.
Il punto A', intersezione tra le rette BE e AD ha coordinate $(4/7, 1/7, 2/7)$.
Per simmetria i punti B' e C' hanno coordinate $(2/7, 4/7, 1/7)$ e $(1/7, 2/7, 4/7)$.
L'area di un triangolo di vertici $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ and $R = (x_3, y_3, z_3)$ è:

$$[PQR] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Il determinante è della forma $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ e vale $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. Sostituendo si ottiene $[A'B'C'] = \frac{1}{7}$.

9. Sia $AB = 60$, $AC = 80$, e $BC = 100$. Se il triangolo ABD ha lo stesso perimetro del triangolo ACD, deve essere $AB + BD$ uguale a $AC + DC$; si ricava facilmente $BD = 60$.

   Disegnamo l'altezza AH relativa a BC. Il triangolo ABH è simile al triangolo BCA. Quindi $AH = 48$ e $BH = 36$. Il triangolo rettangolo AHD ha i due cateti $AH = 48$ e $HD = BD - BH = 60 - 36 = 24$. L'ipotenusa AD misura $24\sqrt{5}$ m. Risposta 5366.

10. La somma dei numeri su ogni riga è $3^{n-1} + 1$. Risposta $3^8 + 1 = 6562$.

11. Su ogni lato dell'ottaedro *grande* possiamo posizionare un ottaedro *piccolo* per un totale di 18 tetraedri. Anche al centro dell'ottaedro grande possiamo posizionare un'ottaedro piccolo. Tra i 19 ottaedri possiamo posizionare esattamente 32 tetraedri, 3 tetraedri per ogni faccia del dell'ottaedro *grande* e 8 tetraedri per ogni faccia del tetraedro centrale. Risposta $19 \cdot 32 = 608$.

12. È la somma di una serie geometrica. Eseguiti i calcoli si trova $(1 + x)^{18} - x^{18}$. Il coefficiente cercato è $\binom{18}{5} = 8568$.

13. Sia r il raggio di una sfera. La diagonale del cubo si può esprimere come

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}r + r + r + \sqrt{3}r.$$

   La soluzione è $r = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4} = 0.316\ldots$.

14. Esprimiamo la somma cercata tramite la seguente tabella:

	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10^2}$	$\frac{3}{10^3}$	$\frac{4}{10^4}$	$\cdots$
0,	1	1	1	1	$\cdots$
0,	0	1	1	1	$\cdots$
0,	0	0	1	1	$\cdots$
0,	0	0	0	1	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

   Eseguiamo le somme lungo le diagonali:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{90} + \frac{1}{900} + \cdots = \frac{10}{81}.$$

15. Nel mazzo di 48 carte con 3 assi, il secondo asso rimane sempre il secondo asso sia se giriamo le carte dall'alto verso il basso e sia se giriamo le carte dal basso verso l'alto. Se il secondo asso si trova in posizione k-esima girando le carte dall'alto verso il basso si ritroverà in posizione $49 - k$-esima girando le carte dal basso verso l'alto. Il numero medio di carte sarà pertanto

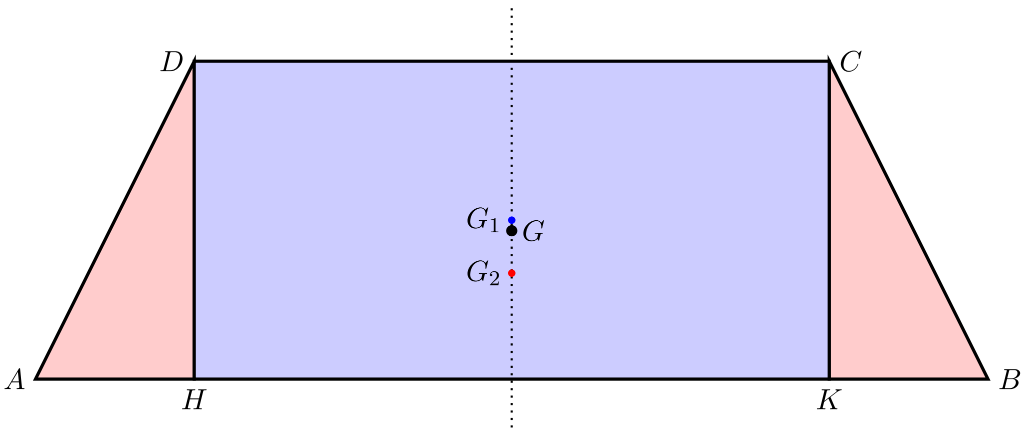
$$\frac{k + 49 - k}{2} = \frac{49}{2}.$$

   Risposta 51.

16. Chiamiamo le promesse A, B, C, D, E. L'ipotesi che due partiti qualunque hanno fatto almeno una promessa in comune garantisce che non ci sono partiti che hanno fatto insiemi di promesse complementari.
   Poiché i $2^5 = 32$ sottoinsiemi di $\{A, B, C, D, E\}$ si possono dividere in $2^4 = 16$ coppie di sottoinsiemi fra loro complementari e le promesse fatte possono comprendere al più un sottoinsieme all'interno di ciascuna coppia, il numero totale dei partiti non può superare 16.
   D'altra parte il numero di 16 può essere effettivamente raggiunto considerando 16 partiti che abbiano fatto tutti la promessa A e inoltre ciascuno uno dei 16 possibili sottoinsiemi di promesse dell'insieme $\{B, C, D, E\}$

17. Il baricentro si trova sull'asse di simmetria del trapezio.

   Dividiamo il trapezio in due figure:



- il rettangolo $HKCD$ di area 288 m^2 e baricentro G_1 sull'asse di simmetria del trapezio e distante 6 cm dalla base (metà dell'altezza);
- i due triangoli AHD e KBC di area complessiva 72 m^2 e baricentro G_2 sull'asse di simmetria del trapezio e distante 4 cm dalla base (un terzo dell'altezza).

Il baricentro G del trapezio si trova tramite la media ponderata tra G_1 e G_2 con pesi pari alle aree

$$\frac{288 \cdot 6 + 72 \cdot 4}{288 + 72} = \frac{28}{5}.$$

Osservazione. La distanza del baricentro dalla base maggiore in un trapezio si può calcolare mediante la seguente formula:

$$\operatorname{dist}(G, BASE) = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}$$

18. Indichiamo con $a = 2x^3 - 3x^2$, $b = x + 1$, $c = 3x^3 - x^2$ e $d = 5x - 13$. L'equazione diventa $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ che risulta vera se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Quindi bisogna risolvere l'equazione:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x + 1} = \frac{3x^3 - x^2}{5x - 13}.$$

Le soluzioni sono 0, $\frac{8}{7}$ e 5.

19. Un numero *giocoso* ha almeno 2 cifre distinte a e b. Quindi ci saranno tra le permutazioni del numero sia $\overline{xxx \ldots xxxab}$ e sia $\overline{xxx \ldots xxxba}$. Un divisore d dei due numeri deve dividere la loro differenza $9(a - b)$ il cui valore massimo è 81. Un numero giocoso che realizza questo massimo è 9999999990.

20. Applicando la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica si ottiene dalla prima relazione che per qualche x

$$\sqrt{f(x)} \geq \frac{f(x) + f(1)}{2} \geq \sqrt{f(x)f(1)}$$

D'altra parte, dato che $f(1) \geq 1$,

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(x)f(1)}$$

quindi deve essere

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x)f(1)}$$

ovvero $f(1) = 1$.

Sostituendo nella seconda relazione si ottiene $f(n) = 2n - 1$. Il valore cercato è $f(29) = 57$.

Soluzioni Gara A Squadre - 8 febbraio 2018

1. Dato che $27 \cdot 37 = 999$, per trovare il resto della divisione per 27 o 37 si divide in terzetti di cifre (a partire da destra) il numero. Il resto cercato è uguale al resto della somma di tutti i terzetti trovati.

   Ora 201820182018 è uguale a $2018 \cdot 100010001$.

   Quindi

   $$\begin{aligned} 2018 &\equiv 2 + 018 \equiv 20 && \pmod{27} \text{ o } \pmod{37} \\ 100010001 &\equiv 100 + 010 + 001 \equiv 111 \equiv 3 \cdot 37 && \pmod{27} \text{ o } \pmod{37} \end{aligned}$$

   Calcolo di a:

   $$201820182018 = 2018 \cdot 1001001001 \equiv 20 \cdot 3 \cdot 37 \equiv 6 \pmod{27}$$

   per cui $a = 6$.

   Calcolo di b:

   $$201820182018 = 2018 \cdot 1001001001 \equiv 20 \cdot 3 \cdot 37 \equiv 0 \pmod{37}$$

   per cui $b = 0$.

   La somma $a + b$ è uguale a 6.

2. La scomposizione in fattori primi di 2018 è $2018 = 2 \cdot 1009$. Il 2 e il 1009 si possono rappresentare come somma di quadrati in un unico modo, $2 = 1^2 + 1^2$ e $1009 = 15^2 + 28^2$. Applicando l'identità $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ si ottiene l'unica soluzione $2018 = 13^2 + 43^2$. Il prodotto vale 559.

3. Il punto finale trovato è l'incentro del triangolo poiché è equidistante dai lati. Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo ($(8, 15, 17)$ è una terna pitagorica) è

   $$r = \frac{a + b - c}{2}$$

   dove a, b e c sono le misure dei cateti e dell'ipotenusa.

   Il numero dei triangoli disegnati è quindi

   $$\frac{8 + 15 - 17}{2} \cdot \frac{100}{2} = 150.$$

4. *SOLUZIONE 1*
   Siano T l'età di T. e M l'età di M., si ottiene

   $$\begin{aligned} T^2 + M &= 3523 \\ M^2 + T &= 1823 \end{aligned}$$

   Sottraendo membro a membro e raccogliendo si ha $(T - M)(T + M - 1) = 1700$. $T - M$ e $T + M + 1$ hanno parità diverse. L'unica soluzione accettabile si ottiene con $T - M = 17$ e $T + M - 1 = 100$ da cui $M = 59$ e $T = 42$.

   SOLUZIONE 2
   Dato che $59^2 < 3523 < 60^2$ e $42^2 < 1823 < 43^2$ le uniche soluzioni intere possibili sono $M = 59$ e $T = 42$ che effettivamente soddisfano le richieste.

5. Sia $\overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}$ la rappresentazione decimale del numero cercato. Deve risultare

   $$\overline{a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n6} = \frac{1}{4} \cdot \overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}$$

   ovvero

   $$4 \cdot \overline{a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n6} = \overline{6a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_n}.$$

La cifra a_n deve essere quindi 4 (la cifra delle unità di 6×4). Sostituendo si ottiene

$$4 \cdot \overline{a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} 46} = \cdot \overline{6 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} 4}.$$

Ora la cifra a_{n-1} è la cifra delle unità di $4 \times 4 + 2$ (2 è il riporto della moltiplicazione precedente) ovvero 8.

Procedendo in questo modo si ricava $a_{n-2} = 3$, $a_{n-3} = 5$, $a_{n-4} = 1$ e finalmente $a_{n-5} = 6$. Il numero cercato è quindi 615384. La risposta è 2880.

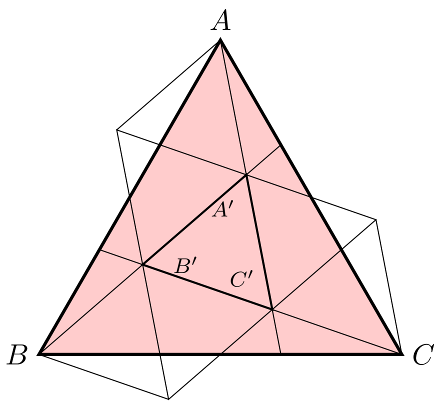
6. Le cifre 4, 6, e 8 non possono essere cifre delle unità. Quindi la somma è al minimo $40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207$. L'insieme $\{2, 5, 7, 43, 61, 89\}$ realizza questo minimo.

7. Non possono esserci 8 numeri consecutivi *discoli*. Infatti tra 8 numeri consecutivi c'è sicuramente un numero n congruo a 4 modulo 8. Quindi $n = 8k + 4 = 4(2k + 1) = 2^2(2k + 1)$, n non è *discolo*. Una sequenza di 7 numeri discoli consecutivi è rappresentata dai numeri 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35.

8. *SOLUZIONE 1*

   Siano A', B', C' rispettivamente i punti di intersezione di AD e BE, BE e CF, CF e AD: per motivi di simmetria il triangolo $A'B'C'$ è equilatero.

   Si verifica che il triangolo ABC è equivalente a 7 triangoli uguali a $A'B'C'$ la cui area è pari allì'area del triangolo ABC come evidenziato in figura.



   Nota: poiché rapporti di segmenti allineati e rapporti di aree sono invarianti per affinità e, fissati due triangoli non degeneri, esiste una ed una sola affinità che trasforma l'uno nell'altro, l'ipotesi che il triangolo sia equilatero è inessenziale.

   SOLUZIONE 2

   Risolviamo il problema in coordinate baricentriche omogenee.
   I punti A, B, C hanno rispettivamente coordinate $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.
   I punti D, E, F hanno rispettivamente coordinate $(0, 1/3, 2/3)$, $(2/3, 0, 1/3)$, $(1/3, 2/3, 0)$.
   L'equazione della retta generica è $ax + by + cz = 0$.
   L'equazione della retta passante per B e E è: $x = 2z$.
   L'equazione della retta passante per A e D è: $z = 2y$.
   Il punto A', intersezione tra le rette BE e AD ha coordinate $(4/7, 1/7, 2/7)$.
   Per simmetria i punti B' e C' hanno coordinate $(2/7, 4/7, 1/7)$ e $(1/7, 2/7, 4/7)$.
   L'area di un triangolo di vertici $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ and $R = (x_3, y_3, z_3)$ è:

$$[PQR] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

   Il determinante è della forma $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ e vale $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. Sostituendo si ottiene $[A'B'C'] = \frac{1}{7}$.

9. Sia $AB = 60$, $AC = 80$, e $BC = 100$. Se il triangolo ABD ha lo stesso perimetro del triangolo ACD, deve essere $AB + BD$ uguale a $AC + DC$; si ricava facilmente $BD = 60$.

   Disegnamo l'altezza AH relativa a BC. Il triangolo ABH è simile al triangolo BCA. Quindi $AH = 48$ e $BH = 36$. Il triangolo rettangolo AHD ha i due cateti $AH = 48$ e $HD = BD - BH = 60 - 36 = 24$. L'ipotenusa AD misura $24\sqrt{5}$ m. Risposta 5366.

10. La somma dei numeri su ogni riga è $3^{n-1} + 1$. Risposta $3^8 + 1 = 6562$.

11. Su ogni lato dell'ottaedro *grande* possiamo posizionare un ottaedro *piccolo* per un totale di 18 tetraedri. Anche al centro dell'ottaedro grande possiamo posizionare un'ottaedro piccolo. Tra i 19 ottaedri possiamo posizionare esattamente 32 tetraedri, 3 tetraedri per ogni faccia del dell'ottaedro *grande* e 8 tetraedri per ogni faccia del tetraedro centrale. Risposta $19 \cdot 32 = 608$.

12. È la somma di una serie geometrica. Eseguiti i calcoli si trova $(1+x)^{18} - x^{18}$. Il coefficiente cercato è $\binom{18}{5} = 8568$.

13. Sia r il raggio di una sfera. La diagonale del cubo si può esprimere come

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}r + r + r + \sqrt{3}r.$$

   La soluzione è $r = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4} = 0.316\ldots$.

14. Esprimiamo la somma cercata tramite la seguente tabella:

	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10^2}$	$\frac{3}{10^3}$	$\frac{4}{10^4}$	$\cdots$
0,	1	1	1	1	$\cdots$
0,	0	1	1	1	$\cdots$
0,	0	0	1	1	$\cdots$
0,	0	0	0	1	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

   Eseguiamo le somme lungo le diagonali:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{90} + \frac{1}{900} + \cdots = \frac{10}{81}.$$

15. Nel mazzo di 48 carte con 3 assi, il secondo asso rimane sempre il secondo asso sia se giriamo le carte dall'alto verso il basso e sia se giriamo le carte dal basso verso l'alto. Se il secondo asso si trova in posizione k-esima girando le carte dall'alto verso il basso si ritroverà in posizione $49 - k$-esima girando le carte dal basso verso l'alto. Il numero medio di carte sarà pertanto

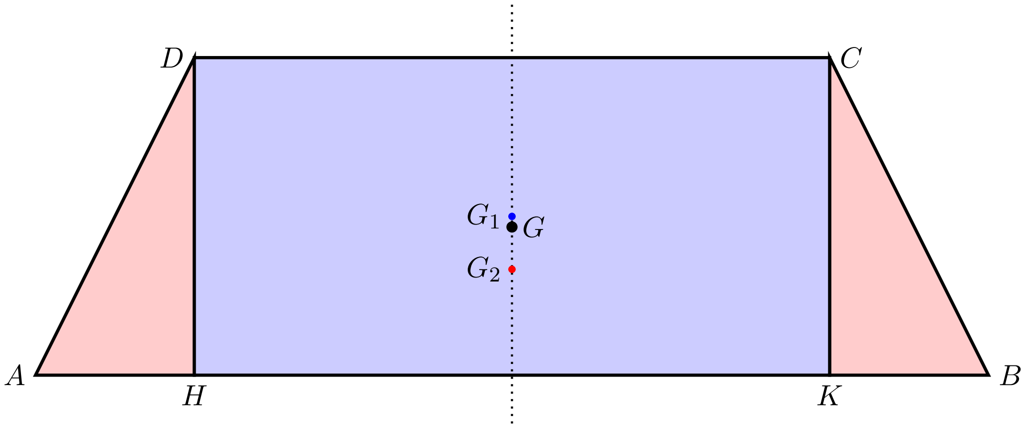
$$\frac{k + 49 - k}{2} = \frac{49}{2}.$$

   Risposta 51.

16. Chiamiamo le promesse A, B, C, D, E. L'ipotesi che due partiti qualunque hanno fatto almeno una promessa in comune garantisce che non ci sono partiti che hanno fatto insiemi di promesse complementari.
   Poiché i $2^5 = 32$ sottoinsiemi di $\{A, B, C, D, E\}$ si possono dividere in $2^4 = 16$ coppie di sottoinsiemi fra loro complementari e le promesse fatte possono comprendere al più un sottoinsieme all'interno di ciascuna coppia, il numero totale dei partiti non può superare 16.
   D'altra parte il numero di 16 può essere effettivamente raggiunto considerando 16 partiti che abbiano fatto tutti la promessa A e inoltre ciascuno uno dei 16 possibili sottoinsiemi di promesse dell'insieme $\{B, C, D, E\}$

17. Il baricentro si trova sull'asse di simmetria del trapezio.

   Dividiamo il trapezio in due figure:



- il rettangolo $HKCD$ di area 288 m^2 e baricentro G_1 sull'asse di simmetria del trapezio e distante 6 cm dalla base (metà dell'altezza);
- i due triangoli AHD e KBC di area complessiva 72 m^2 e baricentro G_2 sull'asse di simmetria del trapezio e distante 4 cm dalla base (un terzo dell'altezza).

Il baricentro G del trapezio si trova tramite la media ponderata tra G_1 e G_2 con pesi pari alle aree

$$\frac{288 \cdot 6 + 72 \cdot 4}{288 + 72} = \frac{28}{5}.$$

Osservazione. La distanza del baricentro dalla base maggiore in un trapezio si può calcolare mediante la seguente formula:

$$\text{dist}(G, BASE) = \frac{h}{3} \cdot \frac{B + 2b}{B + b}$$

18. Indichiamo con $a = 2x^3 - 3x^2$, $b = x + 1$, $c = 3x^3 - x^2$ e $d = 5x - 13$. L'equazione diventa $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ che risulta vera se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Quindi bisogna risolvere l'equazione:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x + 1} = \frac{3x^3 - x^2}{5x - 13}.$$

Le soluzioni sono 0, $\frac{8}{7}$ e 5.

19. Un numero *giocoso* ha almeno 2 cifre distinte a e b. Quindi ci saranno tra le permutazioni del numero sia $\overline{xxx \dots xxxab}$ e sia $\overline{xxx \dots xxxba}$. Un divisore d dei due numeri deve dividere la loro differenza $9(a - b)$ il cui valore massimo è 81. Un numero giocoso che realizza questo massimo è 9999999990.

20. Applicando la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica si ottiene dalla prima relazione che per qualche x

$$\sqrt{f(x)} \geq \frac{f(x) + f(1)}{2} \geq \sqrt{f(x)f(1)}$$

D'altra parte, dato che $f(1) \geq 1$,

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(x)f(1)}$$

quindi deve essere

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x)f(1)}$$

ovvero $f(1) = 1$.

Sostituendo nella seconda relazione si ottiene $f(n) = 2n - 1$. Il valore cercato è $f(29) = 57$.